Решения заданий второго этапа республиканской олимпиады 11 класс

Задача 1. Волейбольный мяч

Волейбольный мяч массой M = 200 г и объемом V = 8 л накачан до избыточного давления p_1 = 0.2 атм. Мяч был подброшен на высоту h = 20 м и после падения на твердый грунт отскочил почти на ту же высоту. Считая, что в момент удара о грунт сжатие мяча было адиабатическим, оцените максимальную температуру воздуха $T_{\max}$ в мяче в момент удара о грунт. Температура наружного воздуха T = 300 К, теплоемкость воздуха при постоянном объеме C_V = 0,72 кДж/(кг·К). Атмосферное давление считать нормальным и равным p_0 = 1 атм = $1{,}01\cdot10^5$ Па. Воздух считать идеальным газом. Энергией деформации грунта и камеры мяча в момент наибольшего сжатия пренебречь. Молярная масса воздуха μ = 29 г/моль.

Решение:

Согласно первому закону термодинамики, изменение внутренней энергии газа равно:

$$\Delta U = Q + A, \qquad (1)$$

где Q – сообщенное газу количество теплоты, A – совершенная над газом работа при его сжатии. Если сжатие считать адиабатическим, то $Q = 0$ и тогда из (1) следует, что

$$\Delta U = A. \qquad (2)$$

Изменение внутренней энергии газа равно (m – масса газа)

$$\Delta U = C_V m(T_{\max} - T). \qquad (3)$$

Работа по сжатию воздуха совершается за счет механической энергии мяча. Пренебрегая энергией деформации грунта и камеры мяча в момент наибольшего сжатия, получаем, что

$$A = Mgh. \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем

$$C_V m(T_{\max} - T) = Mgh \Rightarrow T_{\max} = \frac{Mgh}{C_V m} + T. \qquad (5)$$

Массу газа m можно найти, воспользовавшись уравнением Менделеева–Клапейрона до удара мяча о грунт:

$$(p_0 + p_1)V = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow m = \frac{(p_0 + p_1)V\mu}{RT}. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем:

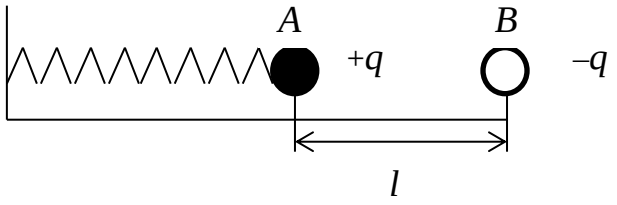
$$T_{\max} = T\left(1 + \frac{RMgh}{\mu V C_V (p_0 + p_1)}\right) \approx 305 \text{ К}.$$

Ответ: 305 К.

Задача 2. Заряженный шарик A находится на конце горизонтальной пружины, жесткость которой k = 20 Н/м. Заряд шарика A считается постоянным и равным $+q$ = +1 мкКл. На расстоянии l = 10 см от центра шарика A находится центр шарика B (см. рисунок) причем заряд шарика B равен $-q$ = –1 мкКл. Система находится в равновесии.

а) Какова будет амплитуда колебаний пружины с шариком A, если шарик B быстро убрать?

б) Изменится ли амплитуда, если шарик B не убрать, а разрядить с учетом того, что он: 1) металлический; 2) изготовлен из диэлектрика?



Решение:

а) Обозначим через x растяжение пружины. Сила упругости, действующая на шарик A со стороны пружины, равна

$$F_1 = kx. \qquad (1)$$

Сила кулоновского притяжения со стороны шарика B (k_0 = 8.99·10^9 Н·м^2/Кл^2) равна

$$F_2 = k_0 \frac{q^2}{l^2}. \qquad (2)$$

Если шарик A находится в равновесии, то, приравнивая правые части (1) и (2), получаем:

$$x = \frac{k_0 q^2}{kl^2} = 4.5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Это и есть искомая амплитуда колебаний.

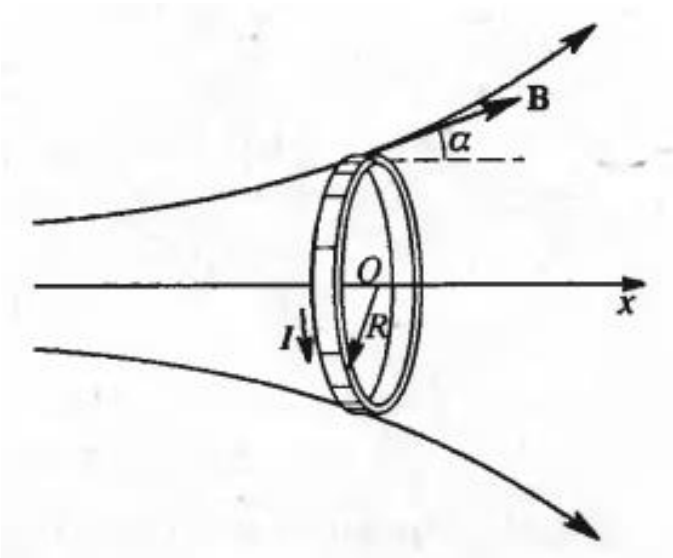
б) Если шарик B диэлектрический, то снять с него заряд за время, которым можно пренебречь, представляется затруднительным (с учетом того, как снимаются заряды с поверхности диэлектрика). В этом случае сила кулоновского взаимодействия между шариками будет уменьшаться более плавно во времени. Если шарик B металлический, то снять с него заряд можно практически мгновенно, но внутри него из-за наличия поблизости заряженного шарика A возникает перераспределение электрических зарядов, а это приведет к возникновению силы притяжения между двумя шариками (хотя по модулю она будет меньше F_2).

В обоих случаях это должно привести к уменьшению амплитуды колебаний.

Ответ: 4.5·10^{-2} м; амплитуда колебаний уменьшается.

Задача 3. Магнетизм.

Тонкое кольцо массой m = 10,0 г и радиусом R = 6,00 см, по которому течет ток I = 15,0 А, поместили в неоднородное аксиально-симметричное (симметричное относительно оси x) магнитное поле. Ось кольца совпадает с осью симметрии магнитного поля (см. рисунок).



а) Определите величину и направление ускорения кольца, если магнитная индукция равна B = 0,080 Тл и составляет с осью Ox угол α = 30,0°.

б) Известно, что магнитное поле не совершает работы над заряженными частицами. Но в данной задаче магнитное поле ускоряет кольцо, совершая работу. Как можно разрешить данный парадокс?

Решение:

а) на элемент кольца с током (длина элемента Δl) действует сила Ампера $\Delta\vec{F}$, направленная, как показано на рисунке. Ее модуль равен

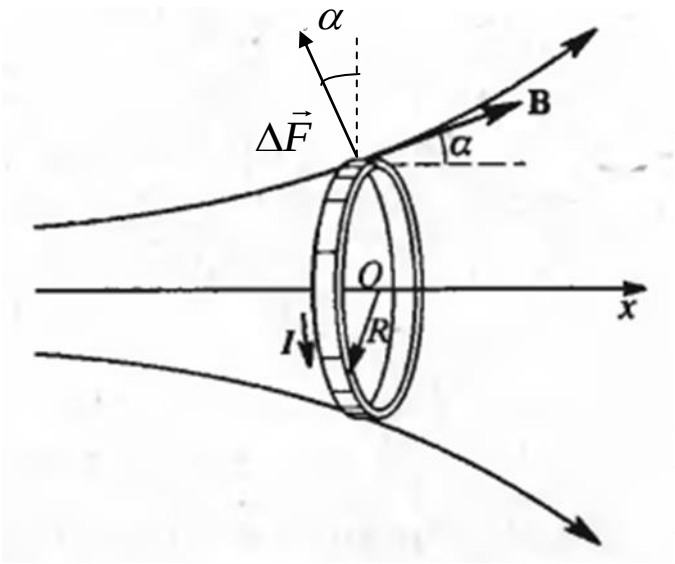
$$\Delta F = I\Delta lB. \qquad (1)$$

Проекция этой силы на ось x равна

$$\Delta F_X = I\Delta lB\sin\alpha. \qquad (2)$$

Для всех элементов кольца получаются такие проекции, и тогда результирующая сила равна

$$F = IlB\sin\alpha = I\cdot 2\pi RB\sin\alpha. \qquad (3)$$



Направлена эта сила против оси x. Из соображений симметрии ясно, что в перпендикулярном к оси x аналогичные проекции взаимно уничтожаются.

Соответственно, ускорение кольца (с учетом численных данных в условии задачи)

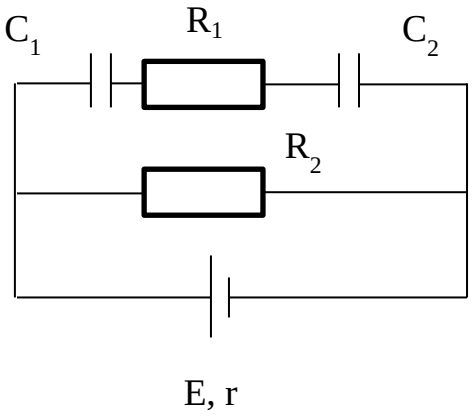
$$a = \frac{F}{m} = \frac{I\cdot 2\pi RB\sin\alpha}{m} = 22{,}62 \text{ м/с}^2. \qquad (4)$$

б) При приобретении кольцом скорости на носители электрического тока в кольце начинает действовать сила Лоренца, связанная с их скоростью движения вместе с кольцом. Принимая условно заряд носителей тока за

положительный, видим, что сила Лоренца действует против тока (на рисунке в верхней точке кольца она направлена от читателя). Она будет стремиться уменьшить ток, тем самым уменьшая кинетическую энергию носителей тока. В итоге суммарная работа силы Ампера, ускоряющей кольцо, и сил Лоренца, уменьшающих ток, будет равна нулю.

Второй способ прийти к аналогичному результату – учесть, что при движении кольца против оси x, оно переходит в область более сильного магнитного поля (т.к. там сгущаются линии магнитной индукции, следовательно в проводнике возникает ЭДС индукции, препятствующая увеличению магнитного потока. Направление этой ЭДС будет против тока в кольце (по правилу Ленца). Легко понять, что физическая причина этой ЭДС в данном случае – именно составляющая силы Лоренца, описанная выше. Т.е. это один и тот эффект, рассмотренный с двух сторон.

Задача 4. В электрическую цепь включены источник тока с ЭДС E и внутренним сопротивлением r, конденсаторы емкостью C_1 и C_2 и резисторы сопротивлением R_1 и R_2 (см. рисунок). Найдите напряжения U_1 и U_2 на каждом конденсаторе.



Решение:

Постоянный ток через конденсаторы емкостью C_1 и C_2 не течет. Поэтому в установившемся режиме ток будет течь по контуру, в котором находится источник тока и резистор R_2. При этом сила тока равна

$$I = \frac{E}{R_2 + r}. \qquad (1)$$

Поскольку конденсаторы соединены последовательно, их заряды q будут одинаковыми, причем

$$U_1 = q/C_1, U_2 = q/C_2. \qquad (2)$$

В силу равенства напряжений на участках, соединенных параллельно, получаем (с учетом того, что сила тока через конденсаторы C_1 и C_2 и резистор R_1 равна нулю):

$$U_1 + U_2 = IR_2. \qquad (3)$$

Подставляя (1) и (2) в (3), после несложных преобразований получаем:

$$q = \frac{ER_2C_1C_2}{(R_2 + r)(C_1 + C_2)}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (2),получаем:

$$U_1 = \frac{ER_2C_2}{(R_2 + r)(C_1 + C_2)},\ U_2 = \frac{ER_2C_1}{(R_2 + r)(C_1 + C_2)}$$

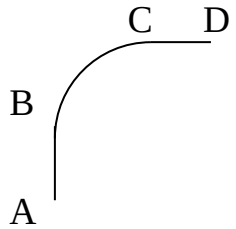
Ответ: $U_1 = \frac{ER_2C_2}{(R_2 + r)(C_1 + C_2)},\ U_2 = \frac{ER_2C_1}{(R_2 + r)(C_1 + C_2)}.$

Задача 5. Движение автомобиля

Автомобиль преодолевает участок $ABCD$, как показано на рисунке, начиная движение из точки A без начальной скорости. Прямолинейный участок AB он преодолевает с постоянным ускорением a. На участке BC, представляющем собой четверть окружности, он движется с постоянной по модулю скоростью, причем значение скорости равно значению, достигнутому в конце участка AB, а центростремительное ускорение равно по величине постоянному ускорению a на участке AB. Затем на прямолинейном участке CD автомобиль продолжает движение с прежним по абсолютной величине постоянным ускорением a. Дополнительно известно, что: 1) участки AB и CD равны по протяженности; 2) общий пройденный путь равен s; 3) общее время движения равно t.

а) Выразите длину x прямолинейного участка через s.

б) Выразите скорость движения автомобиля по закругленному участку через s и t; выразите ускорение a через s и t.



Решение:

а) Обозначим через t_1, t_2 и t_3 время движения автомобиля по участкам AB, BC и CD, соответственно. Через x_1, x_2 и x_3 обозначим длину участков AB, BC и CD, соответственно. Тогда

$$t = t_1 + t_2 + t_3, \qquad (1)$$

$$s = x_1 + x_2 + x_3. \qquad (2)$$

С другой стороны, можно переобозначить

$$x = x_1 = x_3. \qquad (3)$$

Пусть v – скорость, которую набрал автомобиль в конце участка AB. Тогда для участка AB справедливо соотношение

$$x = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v^2}{2x}. \qquad (4)$$

На участке BC справедливо соотношение (R – радиус окружности)

$$a = \frac{v^2}{R}. \qquad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), получаем, что

$$R = 2x. \qquad (6)$$

Длина участка BC равна (в соответствии с (6) и условием задачи):

$$x_2 = \pi R/2 = \pi x. \qquad (7)$$

Подставляя (3) и (7) в (2), получаем:

$$s = x(2+\pi) \Rightarrow x = \frac{s}{2+\pi}. \qquad (8)$$

б) Для промежутков времени t_1 и t_2 получаем соотношения:

$$x = \frac{at_1^2}{2} = \{v = at_1\} = \frac{vt_1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{2x}{v}, \qquad (9)$$

$$\pi x = vt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\pi x}{v}. \qquad (10)$$

Чтобы не решать квадратное уравнение относительно t_3, поступим следующим образом. Обозначим через v_K скорость автомобиля в конце участка CD. Тогда, в соответствии с условием задачи, справедливы соотношения

$$a = \frac{v_K^2 - v^2}{2x}, \qquad (11)$$

$$v_K = v + at_3. \qquad (12)$$

Приравнивая правые части (4) и (11), получаем, что

$$v_K = v\sqrt{2}. \qquad (13)$$

С учетом (4), (12) и (13), для промежутка времени t_3 получаем:

$$t_3 = \frac{2(\sqrt{2}-1)x}{v}. \qquad (14)$$

Подставляя (9), (10) и (14) в (1), получаем:

$$v = \left(2 + \pi + 2(\sqrt{2}-1)\right)\frac{x}{t}. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (4), с учетом (8) получаем:

$$a = \frac{\left(2+\pi+2(\sqrt{2}-1)\right)^2 l}{2(2+\pi)t^2} \approx 3.466\frac{l}{t^2}. \qquad (16)$$

Ответ: $a = \dfrac{\left(2+\pi+2(\sqrt{2}-1)\right)^2 l}{2(2+\pi)t^2} \approx 3.466\dfrac{l}{t^2}$.

Экспериментальная задача

Определить плотность камня неправильной формы без использования мензурки и лабораторных весов.

Оборудование: динамометр, небольшой камень, небольшой пакет с ручками, сосуд с водой.

Выполнение:

Для определения плотности ρ камня необходимо знать его массу m и объем V:

$$\rho = \frac{m}{V}. \qquad (1)$$

Объем можно найти следующим образом. С помощью динамометра можно определить значение веса камня (помещенного в пакет) в воздухе P_1 и в воде P_2. Разность этих значений равна архимедовой силе, действующей на камень в воде (весом пакета и архимедовой силой, действующей на камень в воздухе, пренебрегаем).

$$F_A = P_1 - P_2. \qquad (2)$$

Зная плотность воды ρ_0, определим объем камня с учетом (2):

$$V = \frac{F_A}{\rho_0 g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho_0 g}. \qquad (3)$$

Массу камня можно выразить из его веса в воздухе:

$$m = \frac{P_1}{g}. \qquad (4)$$

Тогда плотность камня найдем, подставляя (3) и (4) в (1):

$$\rho = \frac{P_1}{P_1 - P_2}\rho_0. \qquad (5)$$

Критерии оценки:

Задача 1 – 12 баллов;

Задача 2 – 6 баллов за пункт а), 4 балла за пункт б);

Задача 3 – 8 баллов за пункт а), 6 баллов за пункт б) (по 3 балла за каждое объяснение);

Задача 4 – 10 баллов;

Задача 5 – 12 баллов за пункт а), 14 баллов за пункт б).

Экспериментальная задача – 15 баллов.

Каждая ошибка в вычислениях - минус 2 балла. За ошибку в рассуждениях или неполноту рассуждений можно снимать по 1 или 2 балла в зависимости от глубины недочета. За переходящую ошибку баллы повторно не снимаются. Если в задаче выбрана иная стратегия рассуждений, то в отсутствие логических ошибок и при правильном конечном результате это не может рассматриваться как ошибка в рассуждениях.

Ошибка в размерности или точности вычислений – минус 1 балл. Если одна и та же величина встречается в решении несколько раз с одной и той же

ошибочной размерностью, то это можно считать переходящей ошибкой и баллы повторно не снимать.

В экспериментальной задаче при оценивании также учитывать: а) количество измерений; б) наличие расчета погрешности.